POLINOMIS

Lluís Bibiloni i Matos, Pelegrí Viader i Canals

Introducció

Designarem un polinomi de grau n de la variable x mitjançant la notació

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Així, a_k sempre denotarà el coeficient del monomi de grau k. En principi els coeficients seran nombres reals i, aleshores, direm que $P(x)$ és un polinomi a coeficients reals i escriurem $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ (o complexos, $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, encara que llavors s'acostuma a especificar aquesta circumstància).

El grau d'un monomi $a_k x^k$, $a_k \neq 0$, és el nombre natural k. El grau d'un polinomi és el grau del monomi de grau màxim. Les constants es consideren polinomis de grau 0. El polinomi 0, és a dir, el polinomi idènticament nul, no té grau. En la major part dels problemes, els coeficients acostumen a ser enters ($P(x) \in \mathbb{Z}[x]$) o racionals ($P(x) \in \mathbb{Q}[x]$). Cal recordar que els polinomis són una subclasse de les expressions algebraiques d'una variable. Són les expressions algebraiques enteres, és a dir, que les operacions que lliguen les variables i els coeficients son la suma, la resta i la multiplicació.

Definició. Dos polinomis o, en general, dues expressions algebraiques de qualsevol nombre de variables s'anomenen *equivalents* si prenen el mateix valor numèric per a qualsevol sistema de valors que assignem a les variables.

Exemples d'expressions equivalents són les ben conegudes identitats de suma i diferència del quadrat d'un binomi; en símbols:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2,$$

o la seva generalització coneguda com la fórmula del binomi de Newton. En el cas important $a = 1, b = x$ la fórmula de Newton agafa la forma:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n.$$

El principi d'identitat

Definició. Un polinomi s'anomena *idènticament nul* quan els seus coeficients són zero.

Definició. Dos polinomis s'anomenen *idèntics* quan tenen el mateix grau i els mateixos coeficients.

Per tant, dos polinomis són idèntics quan la seva diferència és un polinomi idènticament nul. La importància d'aquestes definicions rau en el

Principi d'Identitat. Dos polinomis són idèntics si, i només si, són equivalents.

Esquema d'una demostració: Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ i $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ són equivalents (s'acostuma a escriure $P(x) \equiv Q(x)$), en particular han de coincidir per $x = 0$ de manera que $a_0 = P(0) = Q(0) = b_0$, així, doncs, per a tot valor d'x serà

$$a_1 x + \cdots + a_n x^n = b_1 x + \cdots + b_m x^m.$$

Això es pot escriure

$$xP_1(x) = x(a_1 + \cdots + a_n x^{n-1}) = x(b_1 + \cdots + b_m x^{m-1}) = xQ_1(x)$$

per a tot valor d'x. En altres paraules $xP_1(x) \equiv xQ_1(x)$. D'això en podem conclonre que $P_1(x) = Q_1(x)$ sempre que $x \neq 0$ però per poder derivar que $a_1 = b_1$ (i arribar a una demostració per inducció), necessitem poder assegurar que $P_1(0) = Q_1(0)$ i això s'ha de demostrar. Coneixeu algun argument que garanteix la veritat d'aquesta afirmació?
Per una demostració alternativa vegeu el problema **PL5**

A l'hora de resoldre problemes, la conseqüència més important del Principi d'Identitat és l'auomenat *mètode dels coeficients indeterminats.* Explicarem en què consisteix aquest mètode resolent el següent problema de tothom conegut.

Les solucions de l'equació $a\,x^2 + b\,x + c = 0,\ a \neq 0$ *admeten l'expressió*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Solució. És obvi que les solucions de l'equació de segon grau $\gamma\,(x-\alpha)^2 + \beta = 0$ són

$$x_1 = \alpha + \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, \qquad x_2 = \alpha - \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}.$$

D'altra banda, és clar que si dos polinomis són equivalents, han de tenir les mateixes arrels. Per tant, el problema quedarà resolt si sabem determinar α, β i γ de manera que $a\,x^2 + b\,x + c$ i $\gamma\,(x-\alpha)^2 + \beta$ siguin equivalents. és evident que $\gamma\,(x-\alpha)^2 + \beta$ és equivalent a $\gamma\,x^2 - 2\,\gamma\alpha x + \gamma\alpha^2 + \beta$ i del principi d'identitat obtenim que aquest últim polinomi i $a\,x^2 + b\,x + c$ són equivalents si, i només si,

$$\begin{cases} a = \gamma \\ b = -2\,\gamma\alpha \\ c = \gamma\alpha^2 + \beta. \end{cases}$$

Queda a càrrec del lector discutir i resoldre aquest sistema d'equacions en les incògnites α, β i γ i acabar el problema a la seva satisfacció.

PL1. Trobeu tots els nombres primers de la forma $n^4 + 4$.

Indicació: Factoritzeu el polinomi $x^4 + 4$ en producte de dos polinomis de segon grau utilitzant el mètode dels coeficients indeterminats.

PL2. (XXIV Olimpíada Espanyola.) Calculeu per a qualsevol valor del paràmetre enter t, solucions enteres x, y de l'equació

$$y^2 = x^4 - 22\,x^3 + 43\,x^2 + 858\,x + t^2 + 10452\,(t + 39)$$

Algunes identitats remarcables

- $\dfrac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$
- $\dfrac{x^n + a^n}{x-a}$ la divisió no és exacta.
- Si n és senar: $\dfrac{x^n + a^n}{x+a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1}$
- Si n és parell: $\dfrac{x^n + a^n}{x+a}$ la divisió no és exacta.
- Si n és parell: $\dfrac{x^n - a^n}{x+a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots + a^{n-2}x - a^{n-1}$.
- Si n és senar: $\dfrac{x^n - a^n}{x+a}$ la divisió no és exacta.

El cas $a = 1$ és de molta importància (suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica):

$$\frac{x^n - 1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1.$$

De passada, ja que som aquí, esmentem que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad \text{(sèrie infinita). La igualtat val només si } |x| < 1.$$

D'aquí, per substitució directe s'obté (per $|x| < 1$):

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ (signes alternats).

$\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$

$\dfrac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots$

PL3. Demostreu que per a tot $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x} = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}).$$

Aritmètica de Polinomis

Suposem conegudes les operacions algebraiques habituals, incloent la divisió entera de polinomis i la propietat fonamental que afirma el grau del producte de dos polinomis és la suma dels graus dels factors.

Les propietats que llistem a continuació són vàlides pels polinomis a coeficients racionals, reals i complexos.

• Càlcul del *màxim comú divisor* de dos polinomis utilitzant l'algorisme d'Euclides. Si $R(x)$ és el residu de dividir $P(x)$ per $Q(x)$, els divisors comuns de $P(x)$ i $Q(x)$ són els mateixos que els divisors comuns de $Q(x)$ i $R(x)$. L'algorisme consisteix en anar fent les divisions següents:

$$\begin{array}{ll}
P(x) = C_1(x)Q(x) + R_1(x) & \text{grau de } R_1(x) < \text{grau de } Q(x); \\
Q(x) = C_2(x)R_1(x) + R_2(x) & \text{grau de } R_2(x) < \text{grau de } R_1(x); \\
R_1(x) = C_3(x)R_2(x) + R_3(x) & \text{grau de } R_3(x) < \text{grau de } R_2(x); \\
\dots & \\
R_{k-2}(x) = C_k(x)R_{k-1}(x) + R_k(x) & \text{grau de } R_k(x) < \text{grau de } R_{k-1}(x); \\
R_{k-1}(x) = C_{k+1}(x)R_k(x). &
\end{array}$$

Si $R_k(x)$ és una constant, direm que $\mathrm{mcd}(P(x), Q(x)) = 1$, i que $P(x)$ i $Q(x)$ són primers entre sí. En altre cas, $\mathrm{mcd}(P(x), Q(x)) = R_k(x)$.

• Mínim comú múltiple. Es pot calcular com el producte dels polinomis dividit pel màxim comú divisor.

• Concepte de polinomi irreductible: Un polinomi és *irreductible* o *primer* quan no es pot expressar com a producte de polinomis de grau inferior. Cal parar compte en el fet que un polinomi pot ser irreductible a $\mathbb{Q}[x]$ i ser reductible, per exemple, a $\mathbb{R}[x]$ o a $\mathbb{C}[x]$. Trobeu-ne exemples.

• Igual que en el cas dels nombres enters, tenim el

Teorema de la factorització única.: Tot polinomi a coeficients racionals es pot expressar de manera única com a producte de polinomis irreductibles.

• Avaluació d'un polinomi per un valor concret de la variable utilitzant el: **Teorema del residu**: El residu de dividir $P(x)$ per $x - a$ és $P(a)$. La divisió és convenient fer-la pel mètode de Ruffini.

PL4. Demostreu que $x^2 - 2$ és irreductible a $\mathbb{Q}[x]$.

Arrels

Si $P(a) = 0$, es diu que el nombre a és una *arrel* del polinomi $P(x)$. Fixeu-vos que si a es una arrel de $P(x)$, el teorema del residu ens afirma que $x - a$ és un divisor de $P(x)$, és a dir, $P(x) = C(x)(x - a)$.

PL5. Demostreu que un polinomi de grau $n > 0$ no pot tenir més de n arrels.

Utilitzeu aquest resultat per derivar una demostració del Principi d'Identitat.(De fet, es tracta de provar una afirmació més forta que implica aquest enunciat: vegeu el problema següent).

PL6. Demostreu que si un polinomi de grau n s'anul·la per més de n valors de la variable, aleshores el polinomi és idènticament nul.

Quan s'admeten arrels complexes, el resultat contingut en el problema **PL5** es completa amb l'important:

Teorema Fonamental de l'àlgebra, que ens assegura que un polinomi de grau n té exactament n arrels, que poden ser complexes.

Això implica que en el camp complex, els únics polinomis irreductibles són els polinomis de grau 1.

Si els coeficients del polinomi són nombres reals, les arrels complexes s'han de presentar de dues en dues ja que si $a+bi$ és arrel, $a-bi$ (el complex conjugat) també ho és (demostreu-ho). Això justifica el següent resultat: *un polinomi amb coeficients reals i grau imparell té almenys una arrel real.*

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ són les n arrels del polinomi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grau n, el polinomi admet la descomposició en factors lineals:

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n).$$

S'ha de parar compte amb el a_n del davant, és fàcil d'oblidar-lo. Si hi ha arrels múltiples, els factors iguals es poden agrupar:

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{r_s}.$$

La relació

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv a_n(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{r_s}$$

i el Principi d'identitat impliquen que els coeficients de $P(x)$ s'expressen en funció de les seves arrels mitjançant les anomenades fórmules de Cardano:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\cdots$$

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n},$$

és a dir, la suma de tots els possibles productes de k arrels és exactament el coeficient de x^{n-k} dividit per a_n amb signe $(-1)^k$.

PL7. L'equació $x^3+3x^2+qx+3q=0$ té dues solucions que sumen 0. Calculeu, si és possible, el coeficient q i trobeu totes les solucions.

Els primers membres de les fórmules de Cardano tenen la propietat de ser invariants per permutacions de les arrels (és a dir, són *funcions simètriques* de les seves variables, cosa que vol dir que no canvien de valor si intercanviem α_i per α_j, etc.). són les anomenades *funcions simètriques elementals.* Un resultat important i útil a l'hora de resoldre problemes és el teorema següent: *Qualsevol funció racional simètrica de les arrels d'un polinomi s'expressa com a funció racional dels coeficients i recíprocament.*

A la pràctica, trobar l'expressió concreta d'una determinada funció simètrica de les arrels no és fàcil. Per exemple:

PL8. Siguin a, b, c les arrels del polinomi x^3-2x^2+x+5. Trobeu el valor de $a^4+b^4+c^4$.

PL9. (XXVII Olimpíada Espanyola.) Considereu l'equació $x^3+px^2+qx+r=0, r\neq 0$, que suposem admet tres arrels reals i positives, a, b, c. Determineu la relació que ha de lligar els nombres p, q i r per tal que els tres nombres a, b, c puguin ésser les longituds dels costats d'un triangle.

(*Indicació:* Suposeu les arrels ordenades $a\geq b\geq c$ i expresseu la condició de poder formar triangle com una desigualtat que involucri una funció simètrica de a, b, c.)

De les relacions de Cardano, l'última és la més útil. Ens diu que el producte de totes les arrels i a_n és igual al terme independent, amb el signe corresponent:

$$a_n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n a_0.$$

Si els coeficients del polinomi són *enters*, llavors aquesta última relació ens demostra que si α_k és una arrel entera del polinomi, ha de ser forçosament un dels divisors de a_0 amb signe + o −. No és difícil deduir també que si α_k és una arrel fraccionària del polinomi, diguem p/q, llavors$p$ ha de ser un divisor de a_0 (amb signe + o −) i q ha de ser un divisor de a_n. En particular, si $a_n = 1$ el polinomi no pot tenir arrels fraccionàries, llevat de les enteres.

No és difícil tampoc obtenir el següents resultats:

PL10. Si $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, i $P(0)$ i $P(1)$ són imparells, el polinomi no té arrels enteres.

PL11. Si cap dels nombres $P(-1), P(0), P(1)$ és múltiple de 3, el polinomi $P \in \mathbb{Z}[x]$ no té arrels enteres.

PL12. Si un polinomi té una arrel de multiplicitat r, el polinomi derivat té també la mateixa arrel amb multiplicitat $r-1$. Com a conseqüència, si un polinomi no té arrels múltiples, $\mathrm{mcd}(P(x), P'(x)) = 1$.

Si α és arrel múltiple de $P(x)$ de grau n, també és arrel del polinomi $P(x) - Q(x) \cdot P'(x)$ on $Q(x)$ és qualsevol polinomi. Un cas particular interessant és dóna quan $Q(x) = x/n$ ja que aleshores els polinomi $P(x) - P'(x) \cdot (x/n)$ té grau $n-1$.

Fitació de les arrels

Hi ha moltes maneres de donar fites superiors de les arrels positives d'un polinomi. Una de senzilla i fàcil d'obtenir és la fita de MacLaurin: totes les arrels positives es mantenen inferiors que el nombre $1 + N/a_n$ on N és el màxim valor absolut dels coeficients negatius. En general es compleix:

Regla de Laguerre-Thibault.

Si en dividir un polinomi per $x - L$, (on L és un nombre positiu) tots els coeficients del quocient i el residu són positius, L és una fita snperior de les arrels del polinomi. Una manera pràctica de fer això és efectuar la divisió per Ruffini i observar que tots els signes del resultat són positius.

PL13. Demostreu la Regla de Laguerre-Thibault i que la fita de MacLaurin és realment una fita superior de les arrels.

Regla de Descartes.

Si $P(x)$ té els coeficients reals, el nombre total d'arrels reals positives (comptant multiplicitat) és inferior o igual al nombre total de canvis de signe en els coeficients (se suposa el polinomi ben ordenat; si alguns coeficients són 0, no s'han de tenir en compte per a calcular el nombre de canvis de signe). De la mateixa manera, el nombre total d'arrels reals negatives (comptant multiplicitat) és inferior o igual al nombre total de canvis de signe en els coeficients del polinomi $P(-x)$. En qualsevol cas, la diferència entre el nombre d'arrels i el nombre de canvis de signe és sempre un nombre *parell*. La Regla de Descartes només és útil en determinades condicions "extremes". Si no hi ha canvis de signe, llavors *segur* que no hi ha arrels positives; si només hi ha un canvi de signe *segur* que només hi ha una arrel positiva.

PL14. Verifiqueu que el polinomi $x^{11}+x^8-3x^5+x^4+x^3-2x^2+x-2$ té com a màxim 5 arrels positives i 2 de negatives. Demostreu que, com a mínim, té 4 arrels complexes.

PL15. (XXIII Olimpíada Espanyola.) Per a cada nombre natural n considerem el polinomi

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1.$$

a) Demostreu que l'equació $P_n(x) = 0$ té una arrel c_n i només una a l'interval $(0, 1)$.

b) Calculeu $\lim_{n\to\infty} c_n$.

Canvis de variable

PL16. Demostreu que si en un polinomi canviem x per:

a) $-x$, aleshores les arrels canvien de signe.

b) $x + a$, aleshores les arrels queden sumades amb $-a$.

c) βx, aleshores les arrels queden multiplicades per $1/\beta$.

d) $1/x$, aleshores les arrels queden invertides.

(S'entén sempre que ens referim a la relació entre les arrels del nou polinomi i les del vell.)

Aquests últims resultats són força útils en molts problemes. Canviar la x per $x - a$ pot ser difícil en alguns casos, donat el càlcul que això representa. De vegades, per a fer això, pot ser útil recordar el *Teorema de Taylor:*

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Si fem $a = 0$, trobem una manera interessant d'expressar els coeficients d'un polinomi: $a_k = P^{(k)}(0)/k!$

Polinomis especials

PL17. Els polinomis de la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ amb $a \neq 0$ s'anomenen polinomis recíprocs de quart grau. Demostreu

a) Si α és arrel, aleshores $1/\alpha$ també ho és.

b) Es poden trobar les arrels dividint tot el polinomi per x^2 i fent el cauvi $y = x + 1/x$.

Els polinomis de la forma $x^n - 1$ són especialment importants. Les seves arrels són fàcils de trobar: $x = \sqrt[n]{1}$.

Recorrent a la radicació complexa mitjançant la la fórmula de Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta,$$

s'obté

$$1, \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, \ldots, \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Aquests nombres complexos, tots de mòdul 1, s'anomenen les *arrels n-èsimes de la unitat*. Si les dibuixem al pla complex, es distribueixen regularment sobre el cercle unitat i unint els extrems dels afixos corresponents obtenim un n-àgon regular. Entre aquestes arrels n-èsimes de la unitat n'hi ha que tenen la propietat de "generar" totes les altres en el sentit següent: $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \ldots, \xi^{n-1}$ són totes les arrels n-èsimes de la unitat. Direm que ξ és una *arrel primitiva n-èsima de la unitat.*

PL18.

a) Trobeu les arrels primitives sisenes de la unitat.

b) Sigui $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Demostreu que ζ^k és una arrel primitiva n-èsima de la unitat si i només si k i n son primers entre si.

(*Suggeriment*: Si recordeu la funció $\varphi(n)$ (l'indicador d'Euler), podem dir que el nombre total d'arrels primitives n-èsimes de la unitat és $\varphi(n)$.)

PL19. Es defineix $\Phi_n(x)$ com el n-èsim polinomi ciclotòmic de la següent manera:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)})$$

on $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\varphi(n)}$ són totes les arrels primitives n-èsimes de la unitat. Comproveu que

a) $\Phi_2(x) = x + 1$

b) $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$

c) $\Phi_4(x) = x^2 + 1$

d) $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

e) $\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$

Conjectureu com serà $\Phi_p(x)$ si p és primer i demostreu la vostra conjectura.

Tots els polinomis ciclotòmics són irreductibles sobre els enters o els racionals, és a dir, no admeten descomposicions en factors de grau més petit amb coeficients racionals.

Problemes

PL20. Demostreu que la mitjana geomètrica de dos nombres és sempre menor o igual que la seva mitjana aritmètica.

PL21. (Olimpíada Austríaca). Trobeu tots els enters positius n pels quals l'equació de segon grau

$$a_{n+1}x^2 - 2x\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2} + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$

té arrels reals per a qualssevol nombres reals $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

PL22. (Olimpíada Russa, Leningrad). Siguin P_1, P_2 i P_3 polinomis de segon grau amb coeficient principal positiu i arrels reals. Demostreu que, si cada parell d'ells té una arrel comuna, llavors el polinomi $P_1 + P_2 + P_3$ té també arrels reals.

PL23. (Mathematics Magazine). Demostreu que el polinomi $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$ no té arrels negatives.

PL24. Si les arrels del polinomi $x^3 + ax^2 + bx + c$ estan

a) en progressió aritmètica, demostreu que $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.

b) en progressió geomètrica, demostreu que $a^3c = b^3$.

PL25. (Olimpíada Internacional). Demostreu que

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

PL26. (15th IMO, 1973). Siguin a i b nombres reals pels quals l'equació

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

té almenys una solució real. Per a tots aquests parells (a, b), trobeu el mínim valor de $a^2 + b^2$.

PL27. Calculeu la suma $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$.

PL28. (XXIV Olimpíada Catalana). Demostreu que per a qualsevol polinomi $p(x)$ existeix un nombre real k tal que un dels dos polinomis $p(x) + k$ i $xp(x) + k$ no té cap arrel real i l'altre en té només una.

PL29. Inscrivim un heptàgon regular en el cercle de radi unitat. Demostreu que la longitud del costat és una arrel del polinomi $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7$.

PL30. El producte de dues de les quatre arrels de

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$$

és -32. Determineu k.

PL31. Demostreu que tot polinomi té un múltiple polinomial no zero (és a dir el polinomi multiplicat per un altre polinomi), els exponents del qual són tots divisibles per 1000000.

PL32. Demostreu que

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1}.$$

PL33. Demostreu que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

PL34. (XXIII Olimpíada Espanyola.) Demostreu que per a tot nombre natural $n > 1$ es compleix

$$1\cdot\sqrt{\binom{n}{1}} + 2\cdot\sqrt{\binom{n}{2}} + 3\cdot\sqrt{\binom{n}{3}} + \cdots + n\cdot\sqrt{\binom{n}{n}} \le \sqrt{2^{n-1}\,n^3}.$$

Mostra de solucions

Solució del problema PL2

Un polinomi de quart grau $Q(x)$, sempre admet una representació de la forma $Q(x) \equiv \big(p(x)\big)^2 + q(x)$ amb $q(x)$ de primer grau. Només cal escriure $p(x) = ax^2 + bx + c$ i determinar a, b, c per minimitzar el grau de $Q(x) - \big(p(x)\big)^2$. També ho podeu fer completant quadrats.

Sigui, doncs, $Q(x) = x^4 - 22\,x^3 + 43\,x^2 + 858\,x + t^2 + 10452\,(t+39)$. és clar que per eliminar els monomis de quart i de tercer grau de $Q(x) - \big(p(x)\big)^2$ haurà de ser $a = 1$ i $b = -11$ Si escrivim $p(x) = x^2 - 11x + c$, per tal de determinar c fem

$$Q(x) - \big(p(x)\big)^2 = (-2\,c - 78)\,x^2 + (22\,c + 858)\,x - c^2 + +t^2 + 10452\,(t+39)$$

de manera que $-2\,c - 78 = 0$ equival a $c = -39$ (quina casualitat!!). El coeficient de primer grau, passa a valer, aleshores, $22\,(-39) + 858 = 0$ (una altra casualitat, segurament). Resumint,

$$Q(x) = \big(x^2 - 11x - 39\big)^2 + t^2 + 10452\,(t+39) - 39^2.$$

El terme independent es pot escriure $t^2 - 39^2 + 10452\,(t+39) = (t+39)\,(t-39) + 10452\,(t+39)$ i per tant, $(t+39)\,(t + 10452 - 39)$. Fent el canvi de variable

$$t = s - \frac{10452 - 39 + 39}{2} = s - \frac{10452}{2} = s - 5226,$$

agafa la forma $(s - 5187)\,(s + 5187) = s^2 - 5187^2$. El problema inicial es pot reformular demanant qne per cada valor del paràmetre enter s es trobin solucions enteres x, y de l'equació

$$y^2 = \big(x^2 - 11x - 39\big)^2 + s^2 - 5187^2$$

que és equivalent a l'equació

$$y^2 - s^2 = \big(x^2 - 11x - 39\big)^2 - 5187^2.$$

En arribar aquest punt, val a dir que l'enunciat del problema sinó ambigu, com a mínim, és confús. Si no es llegeix amb atenció, hom pot pensar que es demanen totes les solucions i, aleshores, el problema no es raonable, tal com veurem més endavant.

Un cop convençuts que allò que es demana és trobar algunes solucions enteres x, y per a cada valor del paràmetre s (o $t = s - 5226$) es pot procedir de la següent manera. Fent $y = \pm s$, x, y seran solncions si $\big(x^2 - 11x - 39\big)^2 = 5187^2$ i, resulta (de nou, casualment) que l'equació $x^2 - 11x - 39 = 5187$ equivalent a $x^2 - 11x - 5226$ té les solucions $x_1 = -67, x_1 = 78$ de manera que per a cada t enter, $x = -67, y = \pm(t - 5226)$ i $x = 78, y = \pm(t - 5226)$ són quatre solucions del del tipus que es demanen.

Des d'un punt de vista estricte, per donar el problema per acabat cal, encara, explicar perquè es raonable suposar que el problema no pot demanar altra cosa. Per a cada valor enter de x, $n(x) = \big(x^2 - 11x - 39\big)^2 - 5187^2$ és un enter que admet una expressió en diferència de quadrats. Resoldre $y^2 - s^2 = n(x)$ equival a trobar totes les descomposicions de $n(x)$ en diferència de quadrats. Aquest és un problema que depèn de la descomposició de n en factors primers. De fet és fàcil provar i ho deixem com exercici pel lector, que a cada descomposició d'un enter m en producte de dos factors, $m = a\,b$ de la mateixa paritat, li correspon una representació com a diferència de quadrats. Per exemple, un nombre relativament petit com $4725 = 2^3\,5^2\,7$ admet 12 representacions, essencialment diferents, en diferència de dos quadrats.

Per últim direm, que si hem dedicat tant d'espai en aquest problema no es pas perquè el considerem especialment enriquidor, ans al contrari, perquè ningú no dediqui a la seva solució, mes temps d'aquell que és convenient.

Solució del problema PL8

L'expressió $a^4 + b^4 + c^4$ és una funció simètrica de les arrels; per tant es pot expressar com a funció dels coeficients. Si a és arrel del polinomi $x^3 - 2x^2 + x + 5$ s'ha de complir que $a^3 - 2a^2 + a + 5 = 0$. Així, si dividim a^4 entre $a^3 - 2a^2 + a + 5$ tindrem

$$a^4 = (a+2)(a^3 - 2a^2 + a + 5) + 3a^2 - 7a - 10 = 3a^2 - 7a - 10.$$

Igualment

$$b^4 = 3b^2 - 7b - 10 \quad \text{i} \quad c^4 = 3c^2 - 7c - 10.$$

O sigui que

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 = 3a^2 - 7a - 10 + 3b^2 - 7b - 10 + 3c^2 - 7c - 10 = \\ = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 7(a + b + c) - 30. \end{aligned}$$

Ara,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$$

i, per les relacions de Cardano,

$$a + b + c = 2, \quad ab + ac + bc = 1$$

i tenim

$$a^4 + b^4 + c^4 = 3 \cdot (2^2 - 2 \cdot 1) - 7 \cdot 2 - 30 = -38.$$

Solució del problema PL26

Tenim una equació recíproca de 4rt grau. Dividint per x^2 i fent el canvi $y = x + 1/x$ resulta $y^2 + ay + (b-2) = 0$. El canvi efectuat dóna $x^2 - yx + 1 = 0$. Per tal que x sigui real, la y ha de complir $y^2 - 4 \geq 0$ i per tant $|y| \geq 2$. Com que l'equació en y és $y^2 + ay + b - 2 = 0$, les arrels seran

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}}{2}.$$

Si una d'elles ha de ser $|y| \geq 2$, aleshores $|a| + \sqrt{a^2 - 4(b-2)} \geq 4$. D'aquí traiem $8|a| \geq 8 + 4b$. Simplificant, elevant al quadrat i sumant $4b^2$ als dos costats obtenim $4a^2 + 4b^2 \geq 5b^2 + 4b + 4$ d'on

$$a^2 + b^2 \geq \frac{5}{4}\left(b^2 + \frac{4}{5}b + \frac{4}{5}\right) = \frac{5}{4}\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}.$$

El mínim del segon membre es dóna quan $b = -2/5$ i val exactament $4/5$. El corresponent valor de a és $4\sqrt{5}/5$ i, efectivament, per aquests valors de a i b es compleixen les condicions del problema.

Solució del problema PL27

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{d}{dx}(x + x^2 + \cdots + x^n) =$$
$$= \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Substituint x per 2, obtenim la suma desitjada: $2^n(n-1) + 1$.

Solució del problema PL29

El costat de l'heptàgon és $2\sin\pi/7$. Aplicant la fórmula de De Moivre:

$$(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})^7 = \cos\pi + i\sin\pi$$

Igualant parts imaginàries, tenim:

$$-64\sin^7\frac{\pi}{7} + 112\sin^5\frac{\pi}{7} - 56\sin^3\frac{\pi}{7} + 7\sin\frac{\pi}{7} = 0.$$

Ara només cal substituir $\sin\frac{\pi}{7}$ per $l/2$.